Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

طريقة شبكة دورة-V لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية

د. زينب علي الشقماني ا. سمية سالم التاجوري
جامعة مصراتة - كلية التربية - قسم الرياضيات
Email: z.elshegmani@edu.misuratau.edu.ly s.altajouri@edu.misuratau.edu.ly

الملخص

يقدم هذا البحث دراسة عددية باستخدام طريقة **شبكة دورة-V** لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية في بعدين،وكذلك تسريع تقارب الطرق التكرارية الأساسية (جاوس سيدل، SOR) للحصول على نتائج عددية دقيقة بعد عدد قليل من التكرارات؛ نظرًا لأنه في أغلب المسائل التي تحتوي على عدد كبير من المعادلات فإن الوصول إلى الحل العددي الدقيق يتطلب الكثير من التكرارات، هنا تكمن أهمية طريقة **شبكة دورة-V**،وهي تسريع تقارب هذه الطرق للحصول على الحل في أقل وقت ممكن، وبأقل عدد من التكرارات.

الكلمات المفتاحية: المعادلات الإهليجية، الفروق النهائية، متعددة الشبكات، شبكة دورة-V .

V-Cycle Method for Solving Elliptic Partial Differential Equations

Zieneb Ali Elshegmani **Sumaia Salem Altajouri**
z.elshegmani@edu.misuratau.edu.ly s.altajouri@edu.misuratau.edu.ly
Faculty of Education, Misurata University, Misurata, Libya

Abstract

This research presents a numerical study using V-cycle method to solve elliptic partial differential equations in two dimensions, to speed up the convergence of the basic iterative methods (Gauss Seidel, SOR) to obtain accurate numerical results after a few iterations, because in most problems that contain a large number of equations, reaching an accurate numerical solution requires a lot of iterations, here lies the importance of V-cycle method, which is to accelerate the convergence of these methods to get the solution in the least possible time, and with the least number of iterations.

Key words: elliptic equations, finite differences, multigrid methods, V-cycle method.

1. المقدمة

هناك ثلاثة أنواع رئيسية لطرق متعددة الشبكات وهي طريقة الشبكتين، طريقة دورة-V،طريقة الشبكة الكاملة لدورة-V، في هذا البحث سوف ندرس طريقة دورة-V و دورها الفعال في تسريع التقارب للطرق التكرارية الأساسية.

ظهرت أساليب وطرق متعددة الشبكات حديثًا، حيث كان أول منشور "علمي" لمتعددة الشبكات صِيغّ في سنة (1964) بواسطة Fedorenko الذي طور أول مخطط لمتعدد الشبكات لمعادلة بواسون في وحدة مربعة، هذا العمل تم تعميمه على معادلة تفاضلية جزئية خطية مع معاملات متغيرة بواسطة (Bakhvalov 1966). واتضحت الكفاءة الفعلية لطرق متعددة الشبكات في ورقة علمية بواسطة (Brandt 1977) حدد فيها بوضوح المبادئ الرئيسة والفائدة العملية لطرق متعددة الشبكات،هذا العمل لفت الانتباه وشكل بداية التطور السريع لطرق متعددة الشبكات. وفي التسعينات طور (1994 Hackbusch) العناصر الأساسية لطرق متعددة الشبكات.(Wannan 2010) أوضح المفاهيم والتقنيات الأساسية لأساليب الشبكات ودورها في تسريع حل مشاكل القيم الحدية الإهليجية، وكذلك طريقة التعامل مع الشبكات المتداخلة ذات أحجام شبكية متباينة. (AshishK. et. all 2014) استخدم طريقة متعددة الشبكات لإيجاد حل معادلة بواسون الناقصية.

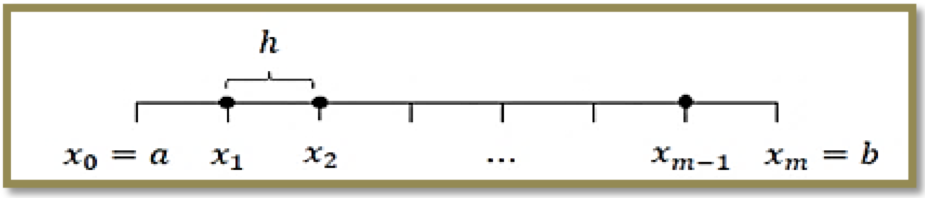
2. هيكل الشبكة (Grid structure) (Fulton et. all 1986)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

- **الشبكة في بعد واحد**

المجال R في بعد واحد المكون بواسطة Ω=[a,b] و Ω_h شبكة معرفة بواسطة:

$$\Omega_h = \{x_i \in [a,b]: x_i = ih, i = 0,1,2, \dots \dots, m, h = \frac{1}{m}\}$$

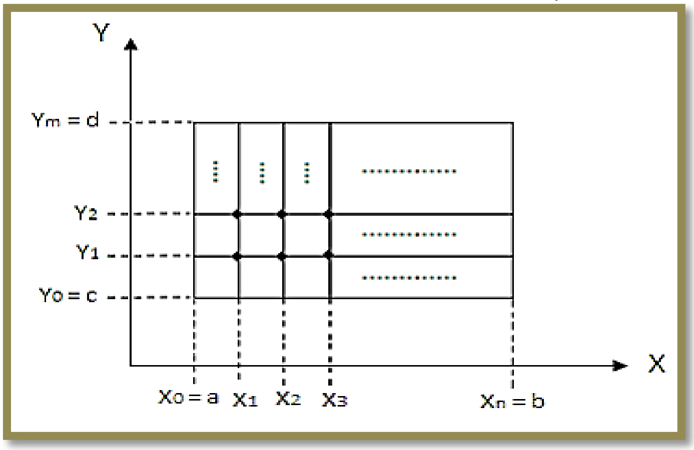


الشكل (1) يوضح شبكة الفروق النهائية في بعد واحد

- **الشبكة في بعدين**

المجال R في بعدين المكون بواسطة Ω = [a,b] ×[c,d] و $\Omega_{h_x h_y}$ شبكة معرف بواسطة:

$$\Omega_{h_x h_y} = \left\{(x_i, y_j) \in \Omega: x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 0,1,2, \dots n, j = 0,1,2 \dots m, h_x = \frac{1}{n}, h_y = \frac{1}{m}\right\}$$



الشكل (2) يوضح شبكة الفروق النهائية في بعدين

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

يتضح من الشكل (2) أنه يوجد خطوط أفقية وخطوط رأسية داخل المستطيل تسمى خطوط الشبكة، وتسمى تقاطعاتها بنقاط الشبكة.وكل نقطة داخل الشبكة تكون معرفة كالتالي

$$(x, y) = \{(x_i, y_j): i = 1,2, \dots, n-1, j = 1,2, \dots m-1\}$$

وفي بعدين ربما تكون المجالات مستطيلة دائرية أو منحنى، والشبكة عبارة عن شبكة ديكارتية منحنية مثبتة على الحدود.وفي هذا البحث سوف يتم استخدام الشبكة الديكارتية والمجالات المستطيلة، حيث إن الطرق التكرارية تستخدم شبكة واحدة، بينما طرق متعددة الشبكات تستخدم أكثر من شبكة.

3. الإستنسل (Stencil) (Trottenberg et. all 2001)

- **الإستنسل في بعد واحد**

إذا كانت h هي المسافة بين النقاط في الشبكة، فإن الإستنسل بصفة عامة للنقطة x في الشبكة يكون على الصيغة $[S_k]_h = [\dots\dots S_{-1} \;\; S_0 \;\; S_1 \dots\dots]$

لتكن $U_h: \Omega_h \to R\mathbb{R}$ و $U_h(x)$ $x \to$ فإن العوامل في مجموعة دوال الشبكة تحدد بواسطة:

$$[S_k]_h U_h(x) = \sum_k S_K U_h(x + kh)$$

- **الاستنسل في بعدين**

إذا كانت المسافة بين نقاط الشبكة هي h_1 بالنسبة لمحور x و h_2 بالنسبة لمحور y، فإن الإستنسل بصفة عامة للنقطة (x,y) في الشبكة يكون على الصيغة:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$[S_{k_1k_2}]_{h_1h_2} = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} & \cdots \\ \cdots & s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} & \cdots \\ \cdots & s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}, (S_{K_1K_2}) \in R$$

لتكن $U_{h_1h_2}: \Omega_h \to R$ و $(x,y) \to U_{h_1h_2}(x,y)$

فإن العوامل في مجموعة دوال الشبكة تحدد بواسطة:

$$[S_{k_1k_2}]_{h_1h_2} U_{h_1h_2}(x,y) = \sum_{k_1k_2} S_{k_1k_2} U_{h_1h_2}\,(x + k_1h_1, y + k_2h_2)$$

في التحليل العددي، بالنظر إلى الشبكة المربعة ذات البعد أو البعدين، يكون استنسل النقاط المنتهية لنقطة في الشبكة عبارة عن استنسل مكون من النقطة نفسها مع النقاط المجاورة لها. ويتم استخدامه لكتابة تقريب الفروق المحددة للمشتقات عند نقاط الشبكة.

4. التنقل بين الشبكات (التقييد والإطالة)

في طرق متعددة الشبكات من الضروري نقل الحل المقرب والباقي والخطأ بين الشبكات، لهذا يوجد نوعين من مؤثرات النقل بين الشبكات وهي:

1. مؤثر التقييد (التمديد).
2. مؤثر الإطالة.

أولاً مؤثر التقييد (التمديد) (Restriction Operator) (Biazar et. all 2006)

عامل التقييد هو راسم من الشبكة الناعمة إلى الشبكة الخشنة كما في الشكل (3) ويرمز له بالرمز R

$$R: \Omega_h \to \Omega_H$$

حيث إن الشبكة الخشنة هي الشبكة الناتجة من الجمع بين عدة عقد من الشبكة الأصلية (الناعمة). وسوف يتم دراسة مؤثر التقييد في بعد واحد وفي بعدين.

1) مؤثر التقييد في بعد واحد

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و $\bar{u}$ معرفة على Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن

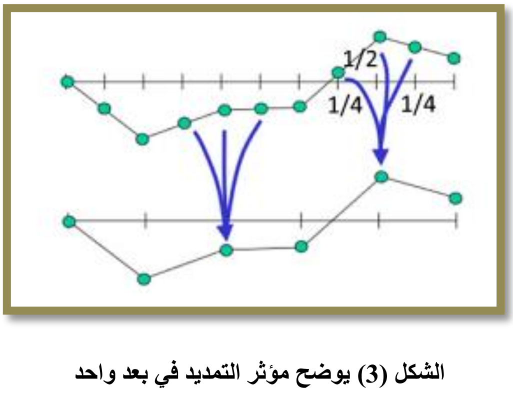
$$Ru = \bar{u}$$

هو مؤثر التقييد في بعد واحد، ويأخذ الصيغة التالية:

$$\bar{u} = \frac{1}{4}u_{2i-1} + \frac{1}{2}u_{2i} + \frac{1}{4}u_{2i+1}\,; \quad 0 \le i \le \frac{N}{2} - 1 \qquad (1)$$

والاستنسل المرتبط به هو $[\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4}]$ فإن:

$$R=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



الشكل (3) يوضح مؤثر التمديد في بعد واحد

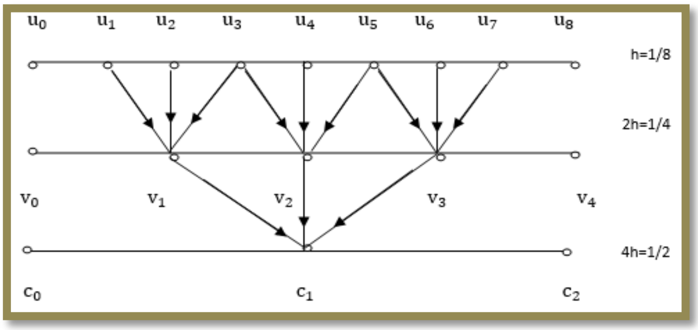
Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

مثال 1

أوجد مؤثر التمديد من الشبكة الناعمة $h=\frac{1}{8}$ إلى الشبكة الخشنة $4h=\frac{1}{2}$ مع شروط ديرشليت الحدية على الحدود تساوي صفر.

الحل

رسم مؤثر التمديد من الشبكة الناعمة إلى الشبكة الخشنة حيث u هي النقاط على الشبكة الناعمة عندما h=1/8، v هي النقاط على الشبكة الخشنة عندما h=1/4 و c هي النقاط على الشبكة الأخشن عندما h=1/2 كما موضح في الشكل (4).



الشكل (4) يوضح مؤثر التمديد من h=1/8 إلي h=1/2

بما أن مؤثر التمديد من الشبكة h إلى الشبكة 2h يكون على الصيغة التالية:

$$R_h^{2h}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}_{7\times 3}$$

$$R_h^{2h} * U = V$$

$$v_1=\frac{1}{4}u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{4}u_3 \qquad v_2=\frac{1}{4}u_3+\frac{1}{2}u_4+\frac{1}{4}u_5$$

$$v_3 = \frac{1}{4}u_5 + \frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{4}u_7$$

وإيجاد مؤثر التمديد من الشبكة 2h إلى الشبكة 4h يكون كما يلي:

بما أن عدد نقاط الشبكة 2h هو ثلاث نقاط، وعدد نقاط الشبكة 4h هو نقطة واحدة فإن مؤثر التمديد يكون من الحجم $R_{1\times3}$.

$$R_{2h}^{4h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$R_{2h}^{4h} * V = C$$

$$C_1 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_3$$

بالتعويض عن قيم v_1, v_2, v_3 في المعادلة السابقة ينتج أن:

$$C_1 = \frac{1}{16}u_1 + \frac{1}{8}u_2 + \frac{3}{16}u_3 + \frac{1}{4}u_4 + \frac{3}{16}u_5 + \frac{1}{8}u_6 + \frac{1}{16}u_7$$

بإعادة كتابة المعادلة السابقة:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = [c_1]$$

ينتج مؤثر التمديد من الشبكة h إلى الشبكة 4h:

$$R_h^{4h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

2) مؤثر التقييد في بعدين (Trottenberg et. all 2000)

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و $\bar{u}$ معرفة على Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن

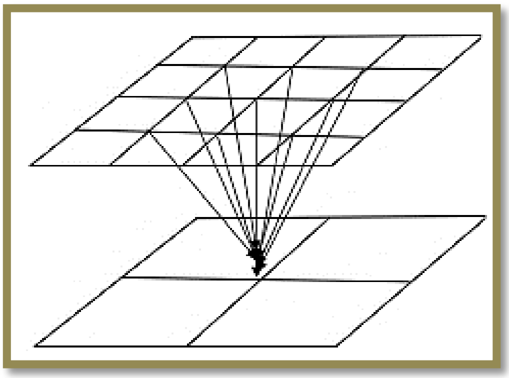
$$Ru=\bar{u}$$

هو مؤثر التقييد في بعدين ويأخذ الصيغة التالية:

$$\bar{u} = \left(\frac{1}{16}\left(u_{2i+1,2j+1} + u_{2i-1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)u_{2i,2j}\right) \qquad (2)$$

ويكون الاستنسل المرتبط به على الشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$



الشكل (5) يوضح مؤثر التمديد في بعدين

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

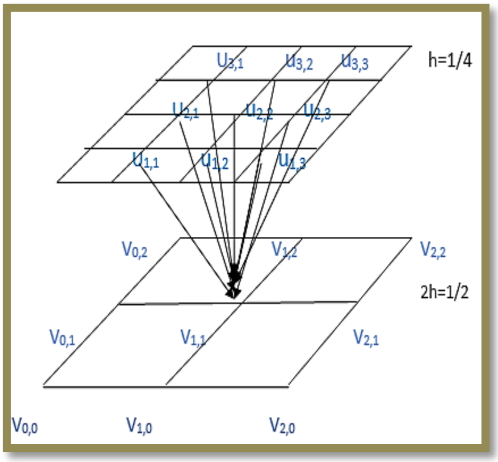
مثال 2

أوجد مؤثر التمديد في بعدين من الشبكة الناعمة h=1/4 إلى الشبكة الخشنة 2h=1/2.

الحل

رسم مؤثر التمديد من الشبكة الناعمة إلى الشبكة الخشنة كما موضح في الشكل (6)

حيث u القيم على الشبكة الناعمة وv القيم على الشبكة الخشنة.



الشكل (6) يوضح مؤثر التمديد في بعدين من $h=\frac{1}{8}$ الي $h=\frac{1}{2}$

$$v_{1,1}=\frac{1}{16}\left(u_{3,3}+u_{1,3}+u_{3,1}+u_{1,1}\right)$$
$$+\frac{1}{8}\left(u_{2,3}+u_{3,2}+u_{2,1}+u_{1,2}\right)+\frac{1}{4}u_{2,2}$$

بإعادة صياغة المعادلة السابقة نحصل على:

$$v_1=\frac{1}{16}(u_3+u_1+u_7+u_9)+\frac{1}{8}(u_2+u_4+u_6+u_8)+\frac{1}{4}u_5$$

إعادة كتابة المعادلة السابقة

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$[v_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix}$$

ينتج مؤثر التمديد من الشبكة الناعمة إلى الشبكة الخشنة:

$$R_h^{2h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

ثانيًا مؤثر الإطالة (Interpolation Operator) (Biazar et. all 2006)

مؤثر الإطالة هو راسم من الشبكة الخشنة إلى الشبكة الناعمة كما في الشكل (7) ويرمز له بالرمز I، حيث $I:\Omega_H \to \Omega_h$

1. مؤثر الإطالة في بعد واحد

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و $\bar{u}$ معرفة على Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن

$$I\bar{u}=u$$

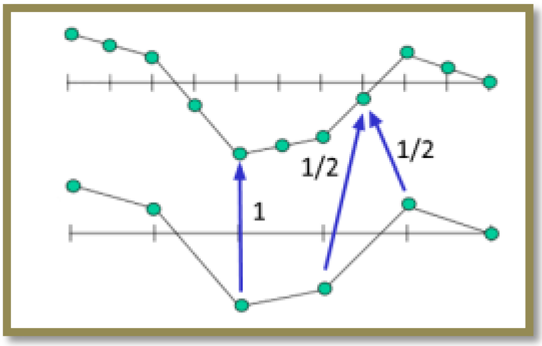
هو مؤثر الإطالة في بعد واحد و يأخذ الصيغة التالية:

$$u_{2i} = \bar{u}_i \ , u_{2i+1} = \frac{1}{2}\bar{u}_{i+1} + \frac{1}{2}\bar{u}_i \ ; 0 \le i \le \frac{N}{2} - 1 \quad (3)$$

والاستنسل المرتبط به هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ فإن:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

$$I=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



الشكل (7) يوضح مؤثر الإطالة في بعد واحد

من خلال ما سبق تكون العلاقة بين مؤثري الإطالة والتقييد في بعد واحد معرفة بالعلاقة التالية $I=2*R^t$

2. مؤثر الإطالة في بعدين (Trottenberg et. all. 2000)

لتكن u معرفة علي Ω_h (الشبكة الناعمة) و $\bar{u}$ معرفة على Ω_H (الشبكة الخشنة) فإن

$$I\bar{u}=u$$

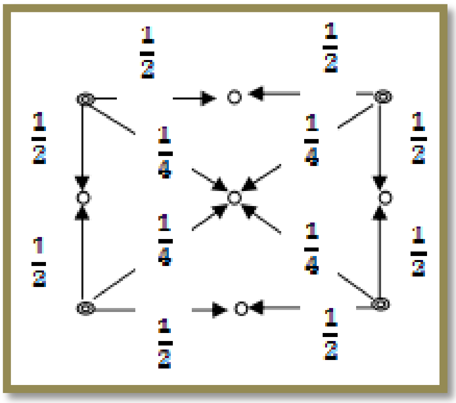
هو مؤثر الإطالة في بعدين ويأخذ الصيغة التالية:

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

$$\left.\begin{aligned} u_{2i,2j} &= \bar{u}_{i,j} \\ u_{2i+1,2j} &= \frac{1}{2}\left(\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i+1,j}\right) \\ u_{2i,2j+1} &= \frac{1}{2}\left(\bar{u}_{i,j-1} + \bar{u}_{i,j+1}\right) \\ u_{2i+1,2j+1} &= \frac{1}{4}\left(\bar{u}_{i+1,j+1} + \bar{u}_{i+1,j-1} + \bar{u}_{i-1,j+1} + \bar{u}_{i-1,j-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

والاستنسل المرتبط به يكون كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



الشكل (8)
يوضح مؤثر الإطالة في بعدين، (◎ نقاط الشبكة الخشنة (○ نقاط الشبكة الناعمة

من خلال ما سبق تكون العلاقة بين مؤثري الإطالة والتقييد في بعدين كما يلي $I=4*R^t$

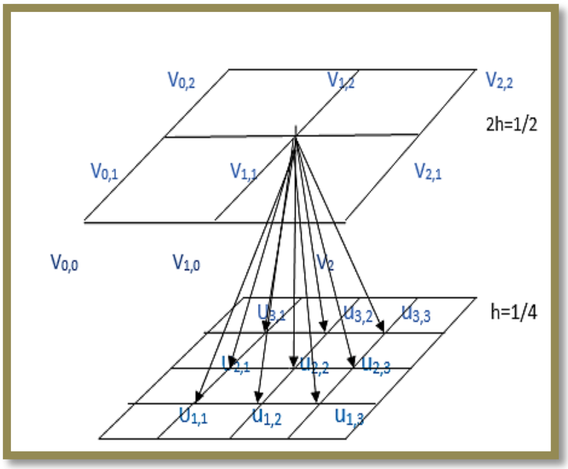
مثال 2

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

أوجد مؤثر الإطالة من الشبكة الخشنة $2h = \frac{1}{2}$ إلى الشبكة الناعمة $h = \frac{1}{4}$ على الفترة $[0,1]$ مع شروط ديرشليت الحدية تساوي صفر.

الحل

يتم رسم عامل الإطالة من الشبكة الخشنة إلى الشبكة الناعمة حيث v تمثل النقاط على الشبكة الخشنة و u تمثل النقاط على الشبكة الناعمة كما موضح في الشكل (9).



الشكل (9) يوضح مؤثر الإطالة في بعدين من $h = \frac{1}{2}$ الي $h = \frac{1}{4}$

من صيغة مؤثر الإطالة في بعدين يتضح أن:

$$u_{2,2} = v_{1,1}$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{2}(v_{1,1} + v_{2,1}) \ , \qquad u_{1,2} = \frac{1}{2}(v_{0,1} + v_{1,1})$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{2}(v_{1,0} + v_{1,1}) \ , \qquad u_{2,3} = \frac{1}{2}(v_{1,1} + v_{1,2})$$

$$u_{3,3} = \frac{1}{4}(v_{1,1}+v_{2,1}+v_{1,2}+v_{2,2}),$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}(v_{1,1}+v_{2,1}+v_{1,0}+v_{2,0}),$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(v_{1,1}+v_{0,0}+v_{1,0}+v_{0,1}),$$

$$u_{1,3} = \frac{1}{4}(v_{1,1}+v_{0,2}+v_{1,2}+v_{0,1})$$

بما أن شروط ديرشليت على الحدود تساوي صفر فان:

$$v_{0,0} = v_{0,1} = v_{0,2} = v_{2,0} = v_{1,0} = v_{2,1} = v_{2,2} = v_{1,2} = 0$$

$$u_{2,2} = v_{1,1}, \quad u_{3,2} = u_{2,3} = u_{1,2} = u_{2,1} = \frac{1}{2} v_{1,1}$$

$$u_{3,3} = u_{1,1} = u_{3,1} = u_{1,3} = \frac{1}{4} v_{1,1}$$

بإعادة كتابة المعادلات السابقة نحصل على:

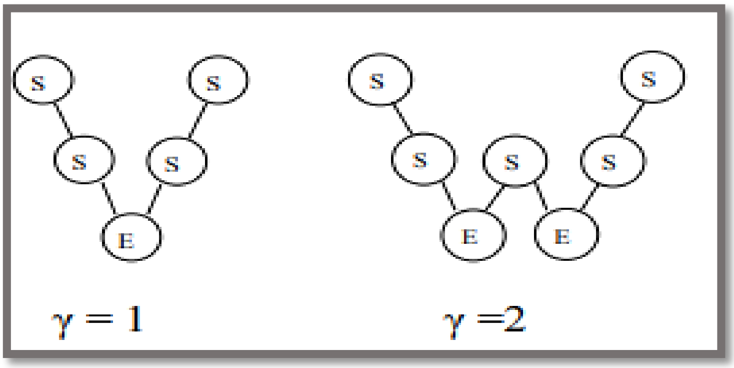
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{11}{24} & 1 & \frac{11}{24} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^{T}_{1\times 9} [v_{1,1}]_{1\times 1} = \begin{bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

لهذا فان مؤثر الإطالة هو مصفوفة العمود $(I_{9\times 1})$.

5. طريقة دورة-V (V-cycle method)

يمكن الحصول على دورة-V عن طريق إجراء عدد من دورة الشبكتين لتكن γ في كل مرحلة وسيطة للحصول على تقدير تقريبي أفضل، سميت دورة-V بهذا الاسم؛ لأن الآلية التي تعمل بها على شكل حرف V. (Biazar et. all 2006)

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28



الشكل (10) يوضح هيكل دورة متعددة شبكات واحدة لشبكات مختلفة وقيم مختلفة لـ γ ، حيث S ترمز للتنعيم E الحل المطلوب، ترمز للتمديد ترمز للإطالة

في حالة $\gamma = 1$ الدورة تسمى دورة -V، وعندما $\gamma = 2$ تسمى دورة -W، والعدد γ يسمى دليلاً للدورة.

في هذا البحث سوف نختص بدراسة دورة-V مع عدد معين من التكرارات v_1, v_2، تكون التكرارات ما قبل التنعيم وما بعد التنعيم على التوالي.

1. خطوة ما قبل التنعيم نستخدم طريقة جاوس سيدل بعدد التكرارات v_1 لإيجاد حل النظام

$$A_h U_h = f_h$$

ونرمز للنتيجة بالرمز v_h

2. تصحيح الشبكة الخشنة من خلال الخطوات التالية:

- نحسب قيمة

$$f_{2h} = R_h^{2h} r_h = R_h^{2h}(f_h - A_h v_h)$$

- نستخدم طريقة جاوس سيدل لإيجاد حل $A_{2h} U_{2h} = f_{2h}$ مع استخدام الحل المبدئي $v_{2h} = 0$ ونرمز للنتيجة بالرمز v_{2h}.
- نحسب قيمة

$$f_{4h} = R_{2h}^{4h} r_{2h} = R_{2h}^{4h}(f_{2h} - A_{2h} v_{2h})$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

- نصحح v_{2h} من العلاقة

$$v_{2h} = v_{2h} + I_{4h}^{2h} v_{4h}$$

- نصحح $v_h = v_h + I_{2h}^{h} v_{2h}$ مع أخذ قيمة v_{2h} بعد التصحيح من الخطوات السابقة.

3. خطوة ما بعد التنعيم نطبق طريقة من الطرق التكرارية علي النظام $A_h U_h = f_h$ بعدد تكرارات v_2 مع القيمة المبدئية ل v_h بعد التصحيح حيث إن:

R_h^{2h} المصفوفة من مؤثر التقييد بين الشبكتين الأولى والثانية

I_{2h}^{h} المصفوفة من مؤثر الإطالة بين الشبكتين الأولى والثانية

R_{2h}^{4h} المصفوفة من مؤثر التقييد بين الشبكتين الثانية والثالثة

I_{4h}^{2h} المصفوفة من مؤثر الإطالة بين الشبكتين الثانية والثالثة

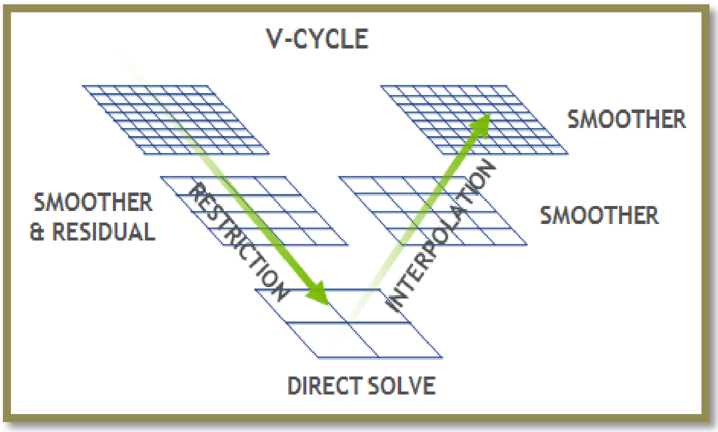
A_h المصفوفة على الشبكة الخشنة

A_{2h} المصفوفة على الشبكة الناعمة الثانية $A_{2h} = R_h^{2h} A_h I_{2h}^{h}$

A_{4h} المصفوفة على الشبكة الناعمة الثالثة $A_{4h} = R_{2h}^{4h} A_{2h} I_{4h}^{2h}$

الشكل (11) يوضح آلية عمل طريقة دورة-V.

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28



الشكل (11) يوضح طريقة دورة-V

مثال 3

أوجد حل مسألة بواسون التالية باستخدام طريقة دورة v

$$u_{xx} + u_{yy} = xy$$

$$u(0,y) = 0, \qquad u(x,0) = 0$$

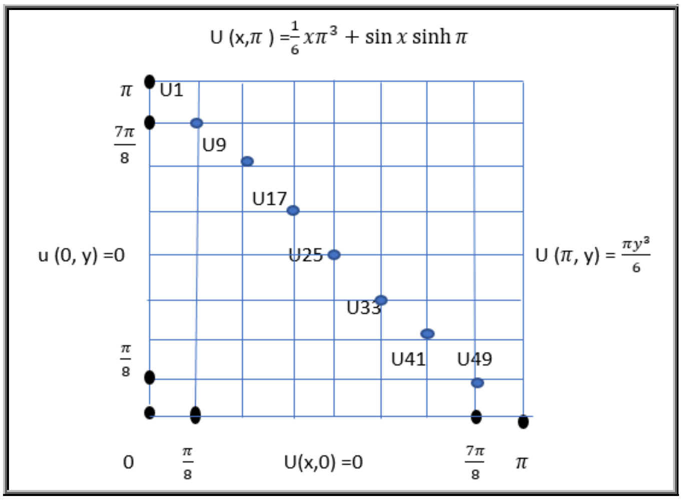
$$u(\pi,y) = \frac{\pi y^3}{6}, \quad u(x,\pi) = \frac{1}{6}x\pi^3 + \sin x \sinh \pi$$

ثم قارن الحل الناتج مع الحل الفعلي لهذه المسألة $u = \frac{1}{6}xy^3 + \sin x \sinh y$

الحل

أولاً نستخدم طريقة الفروق النهائية لإيجاد منظومة من المعادلات الخطية، وذلك بتطبيق مؤثر لإبلاس التفاضلي على النقاط الداخلية، ويتم ترقيم منطقة الحل من اليسار إلى اليمين، ومن الأعلى إلى الأسفل انظر(Causon 2010). حيث $\Delta x = \Delta y = h = \frac{\pi}{8}$ كما هو موضح في الشكل (12).

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17



الشكل (12) يوضح منطقة الحل والشروط الحدية

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} = -h^2 f(x_i, y_j)$$

نحصل على النظام الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
4u_1 - u_2 - u_8 &= 6.282396665 \\
-u_1 + 4u_2 - u_3 - u_9 &= 11.89196281 \\
-u_2 + 4u_3 - u_4 - u_{10} &= 16.25830026 \\
&\vdots \\
-u_{42} - u_{48} + 4u_{49} &= -0.134761926
\end{aligned}$$

يكتب النظام بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 4 \end{bmatrix}_{49\times 49} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.282396665 \\ 11.89196281 \\ 16.25830026 \\ \vdots \\ -0.134761926 \end{bmatrix}$$

في البداية نوجد مؤثرات التقييد والإطالة:

1. مؤثر التقييد

$$v_{i,j} = \left(\frac{1}{16}\right)\left(u_{2i+1,2j+1} + u_{2i-1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)u_{2i,2j}$$

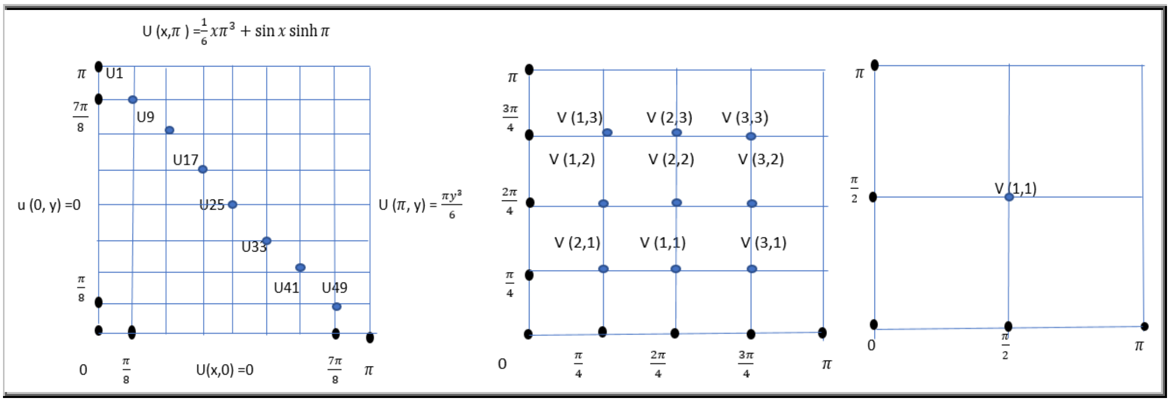
$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{16} \end{bmatrix}_{9\times 49}$$

2. مؤثر الإطالة يمكن الحصول عليه من خلال العلاقة $I=4*(R^t)$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$I=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}_{49\times 9}$$

ثانيا نستخدم طريقة دورة -V لتسريع تقارب طريقتي جاوس سيدل و SOR باستخدام ثلاث شبكات للحل: الأولى ناعمة عندما $h=\frac{\pi}{8}$ والثانية خشنة عندما $2h=\frac{\pi}{4}$ والثالثة أخشن عندما $4h=\frac{\pi}{2}$ كما موضح في الشكل (13).



الشكل (13)

1- إيجاد حل النظام الخطي باستخدام طريقة جاوس سيدل بعد عدد قليل من التكرارات فيكون الناتج:

Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

$$v_h = \begin{bmatrix} 4.31387982 \\ 8.18324496 \\ 11.22421218 \\ \vdots \\ 0.28753660 \\ 0.17166513 \end{bmatrix}_{49\times 1}$$

2- تصحيح الشبكة الخشنة، ويتم من خلال الخطوات التالية:

- نحسب قيمة $f_{2h} = R_h^{2h} r_h = R_h^{2h}(f_h - A_h v_h)$

$$f_{2h} = \begin{bmatrix} 0.04113656 \\ 0.04315881 \\ 0.02205234 \\ 0.04239024 \\ 0.04322543 \\ 0.02118978 \\ 0.02145624 \\ 0.02098191 \\ 0.00963076 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

نستخدم طريقة جاوس سيدل لإيجاد حل $A_{2h}U_{2h} = f_{2h}$ مع استخدام الحل المبدئي $v_h = 0$ ونرمز للنتيجة بالرمز v_h علما بأن $A_{2h} = R_h^{2h} A_h I_{2h}^h$

$$\begin{bmatrix} 0.75 & -0.125 & 0 & -0.125 & -0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & 0.75 & -0.125 & -0.0625 & -0.125 & -0.0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0.75 & 0 & -0.0625 & -0.125 & 0 & 0 & 0 \\ -0.125 & -0.0625 & 0 & 0.75 & -0.125 & 0 & -0.125 & -0.0625 & 0 \\ -0.0625 & -0.125 & -0.0625 & -0.125 & 0.75 & -0.125 & -0.0625 & -0.125 & -0.0625 \\ 0 & -0.0625 & -0.125 & 0 & -0.125 & 0.75 & 0 & -0.0625 & -0.125 \\ 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.0625 & 0 & 0.75 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0625 & -0.125 & -0.0625 & -0.125 & 0.75 & -0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0625 & -0.125 & 0 & -0.125 & 0.75 \end{bmatrix}_{9\times 9}$$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا ـالعدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$v_{2h} = \begin{bmatrix} 0.05484875 \\ 0.06668654 \\ 0.04051755 \\ 0.07121899 \\ 0.08856535 \\ 0.05532407 \\ 0.04785860 \\ 0.06125846 \\ 0.03965189 \end{bmatrix}$$

- نحسب قيمة $f_{4h} = R_{2h}^{4h} r_{2h} = R_{2h}^{4h}(f_{2h} - A_{2h}v_{2h})$

حيث إن:

$$v_{i,j} = \frac{1}{16}\left(u_{2i+1,2j+1} + u_{2i-1,2j+1} + u_{2i+1,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}\right) + \frac{1}{8}\left(u_{2i+1,2j} + u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j}\right) + \frac{1}{4}u_{2i,2j}$$

$$v_{1,1} = \frac{1}{16}[u_{3,3} + u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}] + \frac{1}{8}[u_{2,3} + u_{3,2} + u_{2,1} + u_{1,2}] + \frac{1}{4}u_{2,2}$$

$$R_{2h}^{4h} = [1/16 \quad 1/8 \quad 1/16 \quad 1/8 \quad 1/4 \quad 1/8 \quad 1/16 \quad 1/8 \quad 1/16]_{1\times 9}$$

$$I_{4h}^{2h} = 4 * \left(R_{2h}^{4h}\right)$$

$$I_{4h}^{2h} = [1/4 \quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 1 \quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/2 \quad 1/4]_{1\times 9}^{t}$$

$$f_{4h} = [0.01502410]$$

- إيجاد قيمة v_{4h} من خلال العلاقة $v_{4h} = inv(A_{4h}) * f_{4h}$ حيث إن:

$$A_{4h} = R_{2h}^{4h} A_{2h} I_{4h}^{2h}$$

$$A_{4h} = [0.17187500]$$

$$v_{4h} = [0.08741299]$$

- نصحح $v_{2h} = v_{2h} + I_{4h}^{2h} v_{4h}$

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ النشر:2025/01/28 تاريخ الاستلام:2024/11/17

$$v_{2h} = \begin{bmatrix} 0.07670200 \\ 0.11039304 \\ 0.06237080 \\ 0.11492549 \\ 0.17597835 \\ 0.09903057 \\ 0.06971185 \\ 0.10496496 \\ 0.06150514 \end{bmatrix}_{9\times1}$$

- نصحح $v_h = v_h + I_{2h}^h v_{2h}$ مع أخذ قيمة v_{2h} بعد التصحيح

$$v_h = \begin{bmatrix} 4.33305532 \\ 8.22159596 \\ 11.2709859 \\ \vdots \\ 0.31828917 \\ 0.18704141 \end{bmatrix}_{49\times1}$$

3- خطوة ما بعد التنعيم نطبق طريقة جاوس سيدل $A_h U_h = f_h$ بعدد تكرارات مع القيمة المبدئية ل v_h بعد التصحيح

الجدول التالي يوضح حل المسألة (3) باستخدام طريقة دورة-V وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة جاوس سيدل

h= π/8					
x	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة دورة-V	الخطأ المطلق الناتج من طريقة دورة-V
π/4	3π/4	5.40900358	5.44430192	5.44430192	3.53×10^{-2}
π/4	π/2	2.13460308	2.16438366	2.16438366	2.98×10^{-2}
π/2	π/2	3.31597693	3.35809304	3.35809304	4.21×10^{-2}
π/4	π/4	0.67766050	0.69295987	0.69295987	1.53×10^{-2}
π/8	7π/8	4.33704264	4.33207016	4.33207016	1.44×10^{-2}
3π/4	π/4	0.80449526	0.81979462	0.81979462	1.53×10^{-2}
عدد التكرارات		/	124	34	/

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28

الآن نستخدم طريقة دورة-V لتسريع تقارب طريقة SOR لحل النظام الخطي الناتج.
في هذه الخطوة تم استخدام طريقة دورة-V لتقريب طريقة SOR على المثال (3)

فكانت النتائج موضحة كما يلي:

الجدول التالي يوضح حل المسألة (3) باستخدام طريقة دورة-v وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة SOR

h= π/8					
x	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة دورة-v	الخطأ المطلق الناتج من طريقة دورة-v
π/4	3π/4	5.40900358	5.44430192	5.44430192	3.53×10^{-2}
π/4	π/2	2.13460308	2.16438366	2.16438366	2.98×10^{-2}
π/2	π/2	3.31597693	3.35809304	3.35809304	4.21×10^{-2}
π/4	π/4	0.67766050	0.69295987	0.69295987	1.53×10^{-2}
π/8	7π/8	4.33704264	4.33207016	4.33207016	1.44×10^{-2}
3π/4	π/4	0.80449526	0.81979462	0.81979462	1.53×10^{-2}
عدد التكرارات		/	75	9	/

مثال 4
أوجد حل مسألة هيلمهولتز التالية مع شروط ديرشليت باستخدام طريقة دورة -V

$$u_{xx} + u_{yy} - 12.5\pi^2 u = -25\,\pi^2 sin(2.5\pi x) sin(2.5\pi y)$$

على المنطقة $S=\{(x,y): 0< x, y<0.4\}$ حيث $u\ (x, y) =0 \text{ on } \partial S$
ثم قارن الحل الناتج مع الحل الفعلي لهذه المسألة
$$u(x, y) = sin(2.5\pi x) sin(2.5\pi y)$$

الحل

أولاً: نستخدم طريقة الفروق النهائية لإيجاد منظومة من المعادلات الخطية وذلك بتطبيق مؤثر لإبلاس التفاضلي على النقاط الداخلية،ويتم ترقيم منطقة الحل من اليسار إلى اليمين، ومن الأعلى إلى الأسفل.

الجدول التالي يوضح حل المسألة باستخدام طريقة دورة -V وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة جاوس سيدل

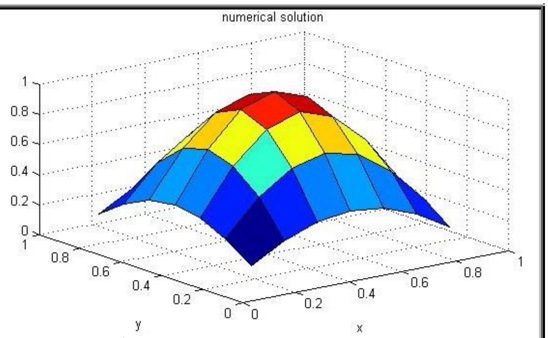
h=1/20					
x	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة جاوس سيدل	الحل بطريقة دورة-V	الخطأالمطلق الناتج من طريقة دورة-V
1/20	7/20	0.14644661	0.14738880	0.14738880	9.4219×10^{-4}
4/20	6/20	0.70710678	0.71165609	0.71165609	4.5493×10^{-3}
6/20	5/20	0.65328148	0.65748450	0.65748450	4.2030×10^{-3}
4/20	4/20	1	1.00643370	1.00643370	6.4337×10^{-3}
1/20	2/20	0.27059805	0.2723390	0.2723390	1.7409×10^{-3}
7/20	1/20	0.14644661	0.14738880	0.14738880	9.4219×10^{-4}
عدد التكرارات		/	59	15	/

الجدول التالي يوضح حل المسألة باستخدام طريقة دورة-V وتوضيح مدى تسريع التقارب لطريقة SOR

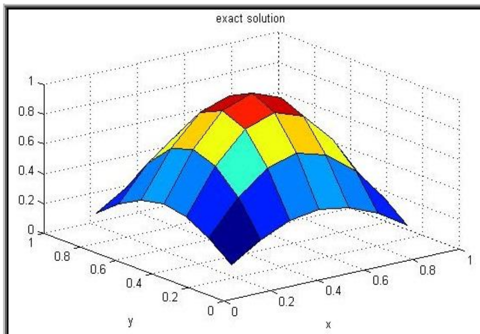
h=1/20					
x	y	الحل الفعلي	الحل بطريقة SOR	الحل بطريقة دورة-V	الخطأ المطلق الناتج من طريقة دورة-V
1/20	7/20	0.14644661	0.14738880	0.14738880	9.4219×10^{-4}
4/20	6/20	0.70710678	0.71165609	0.71165609	4.5493×10^{-3}
6/20	5/20	0.65328148	0.65748450	0.65748450	4.2030×10^{-3}
4/20	4/20	1	1.00643370	1.00643370	6.4337×10^{-3}
1/20	2/20	0.27059805	0.2723390	0.2723390	1.7409×10^{-3}
7/20	1/20	0.14644661	0.14738880	0.14738880	9.4219×10^{-4}
عدد التكرارات		/	25	6	/

من الجداول السابق نلاحظ أن طريقة دورة –V عملت على تسريع تقارب طريقة SOR إلى أكثر من نص عدد التكرارات.

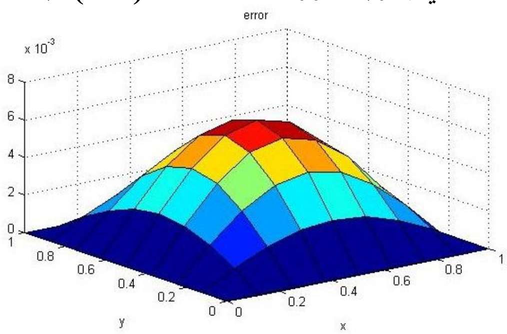
Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, No26, Mar 2025
Published online in March
المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا -العدد السادس والعشرون،مارس2025
Issn: 2710-4141
تاريخ الاستلام:2024/11/17 تاريخ النشر:2025/01/28



الشكل (14a): يمثل الحل العددي بطريقة دورة-V



الشكل (14b): يمثل الحل الفعلي



الشكل (14c): يمثل الخطأ المطلق

النتائج

هذه الورقة البحثية قدمت دراسة حول الحلول العددية لمسائل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليجية في بعدين نظرًا لصعوبة إيجاد الحلول التحليلية لها، وذلك من خلال تطبيق طريقة الفروق النهائية على المناطق المنتظمة حيث تمتاز هذه الطريقة بسهولة تطبيقها، ثم تطبيق طريقة دورة-V، حيث أظهرت هذه الدراسة كما هو موضح في النتائج العددية المتحصل عليها أن طريقة دورة-V قد سرعت تقارب الطرق التكرارية إلى نص عدد التكرارات تقريبًا،و أن سرعة التقارب تعتمد على عدد الشبكات كلما زاد عدد الشبكات كان الحصول على الحل أسرع، بالنسبة لدقة الحل لطريقة دورة-Vتعتمد على قيمة h كلما كانت h صغيرة تحصلنا على دقة أفضل، بينما سرعة التقارب لهذه

الطرق لا تعتمد على البعد بين النقاط (قيمةh) هذه الخاصية جعلت طريقة دورة-Vمُسرع جيد للطرق التقليدية.

Refrences

Ashish, K. G., Itendra K. Sham B. & Ishu G. (2014). Multigrid approach for solving elliptic type partial differential equations, Int. J. Sci. Res 3 473-475.

Brandt, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. Mathematics of Computation, 31(138)333-90.

Bakhvolv, N. C. (1966). On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. USSR Comp. Math. Math. Phys. 6 101-13.

Causon, D. M, Mingham C. G. (2010). *Introductory finite difference methods for PDEs*. Bookboon.

Chicago Ford W. (2014). *Numerical linear algebra with applications: Using MATLAB*. Academic Press.

Fulton Scott R., Paul E. Ciesielski, & Wayne H. S. (1986) "Multigrid methods for elliptic problems: A review." Monthly Weather Review 114.5 943-959.

Hackbusch, W. (1994). *Iterative solution of large sparse systems of equations*. New York: Springer.

Hackbusch, W. & Trottenberg U. (2006). Multigrid methods: proceedings of the conference held at Köln-Porz, November 23-27, Vol. 960. Springer, 2006.

Mathews, J. H., & Kurtis D. F. (2004). *Numerical methods using MATLAB*. Vol. 4. Upper Saddle River, NJ: Pearson prentice hall,.

Strauss, Walter A. (2008). *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons.

Trottenberg,U., Cornelius W. Oosterlee, & A. Schuller. (2001) "Multigrid academic press." New York.

Trottenberg U., Cornelius W. Oosterlee, & A. Schuller. (2000) "Multigrid Elsevier.

Biazar, J., P. Gholamin, & K. Hosseini. (2006) "Exact solutions of Poisson equation by using variational iteration and Adomian decomposition methods." 11-19.

Wannan, M. R. T. (2010) *Multigrid Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Diss.